OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, Braşov, februarie 2010
Clasa a XI-a

SUBIECTUL I

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ ce satisfac:

$$4x_n = (x_{n-1} + y_{n-1})\sqrt{6} + (x_{n-1} - y_{n-1})\sqrt{2},$$
$$4y_n = (y_{n-1} - x_{n-1})\sqrt{6} + (x_{n-1} + y_{n-1})\sqrt{2},$$

pentru orice $n \geq 1$. Arătaţi că cele două şiruri sunt periodice si determinaţi perioadele acestora.

prof. Mihaly Bencze

SUBIECTUL II

Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_1 = 1$ şi care verifică relaţia:

$$2n^2(a_{n+1} - a_n - 1) + n(a_{n+1} - 3a_n) + 2a_n = n^4 + 3n^3, \qquad \forall n \geq 1.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{a_n}$.

prof. Gabriela Boeriu

SUBIECTUL III

a) Dacă există $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ astfel încât $A \cdot B = I_n$, atunci $A \cdot B = B \cdot A$.

b) Dacă există $p, q \in \mathbf{N}^*$ şi $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ astfel ca $pA + qB = A \cdot B$, demonstraţi că $A^p \cdot B^q = B^q \cdot A^p$.

prof. Traian Duţă

SUBIECTUL IV

Spunem că o matrice nenulă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ este *nilpotentă*, dacă există $n \in \mathbf{N}$ astfel încât $X^n = O_2$ (matricea nulă). Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ două matrice nenule, nilpotente. Să se demonstreze că matricea $A + B$ este nilpotentă dacă şi numai dacă matricele $A \cdot B$ şi $B \cdot A$ sunt nilpotente.

prof. Romeo Ilie

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect are 7p. Timp de lucru 3 ore.